

受験数学基礎力チェック

名前 _____

1. $x^4 + 4$ を有理数の範囲で因数分解せよ。また、複素数の範囲で因数分解せよ。

考え方 $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ の形を作りに行く。また、「有理数の範囲」は分数まで、「実数の範囲」は $\sqrt{\quad}$ まで、「複素数の範囲」は i まで使ってよいので方程式を作って解く。

○ 解答

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = \underline{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}$$

実数の範囲ではここまで。複素数の範囲では、

$$\text{さらに、} x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ として解くと、} x = \frac{(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} = 1 \pm i$$

$$\text{から、} x^2 - 2x + 2 = \{x - (1 + i)\}\{x - (1 - i)\} = (x - 1 - i)(x - 1 + i)$$

$$\text{同様に考えて、} x^2 + 2x + 2 = \{x - (-1 + i)\}\{x - (-1 - i)\} = (x + 1 - i)(x + 1 + i)$$

$$\text{以上より、} x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = \underline{(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)}$$

2. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $2 \cos 2\theta - 1 > 0$ を満たす θ をもとめよ。

考え方 基本問題だが、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $0 \leq 2\theta < 4\pi$ となるところを見逃さない。

○ 解答

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから、} 0 \leq 2\theta < 4\pi$$

$$\cos 2\theta > \frac{1}{2} \text{ より、}$$

$$0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{3} \quad \frac{5}{3}\pi < 2\theta < \frac{7}{3}\pi \quad \frac{11}{3}\pi \leq 2\theta < 4\pi$$

$$\text{ゆえに、} \quad \underline{0 \leq \theta < \frac{\pi}{6} \quad \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi \quad \frac{11}{6}\pi \leq \theta < 2\pi}$$

3. $\{a_n\} = \{5, 3, 7, -1, 15, -17, \dots\}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し、以下の問いに答えよ。

(1) a_7 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

考え方 一見して規則性がわからない場合は階差数列を考えてみる。階差数列 $\{b_n\}$ の一般項がわかれば、
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
である。なお、階差数列の $\sum$ の計算結果が「きもちわるい」場合は、一般項を作った時点で $n = 1, n = 2, \dots$ を代入して確認するようにする。

○ 解答

(1) 階差数列を b_n とすると、 $\{b_n\} = \{-2, 4, -8, 16, -32, \dots\}$ である。

b_n は初項 -2 公比 -2 の等比数列であることから、 $b_6 = 64$ である。
よって、 $a_7 = a_6 + b_6 = -17 + 64 = 47$ である。

(2) (1) より、階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = (-2)^n$ である。したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^k = 5 + \frac{(-2)\{1 - (-2)^{n-1}\}}{1 - (-2)} \\ &= 5 + \frac{(-2) - (-2)^n}{3} = \underline{\underline{\frac{13}{3} - \frac{(-2)^n}{3}}} \end{aligned}$$

4. $\triangle ABC$ が $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = 7$, $|\overrightarrow{BC}| = 10$ を満たす。BC を 2:1 に内分する点を D とするとき線分 AD の長さを求めよ。

考え方 線分の長さは、その線分をベクトルで表わして 2 乗して求める。その過程で内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ が必要になるが、これは $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ から計算する。

○ 解答

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 = 100$$

$$\text{値を代入して } 49 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + 25 = 100$$

$$\text{したがって、}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -13 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{また、}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \text{ であるから、}$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{1}{9}(|\overrightarrow{AB}|^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 4|\overrightarrow{AC}|^2) = \frac{1}{9}(25 - 52 + 196) = \frac{169}{9}$$

$$|\overrightarrow{AD}| > 0 \text{ であるから、} \quad \underline{\underline{|\overrightarrow{AD}| = \frac{13}{3}}}$$